У Т В Е Р Ж Д А Ю

Ректор ФГАОУ ВО "КФУ им.В.И. Вернадского"
доктор медицинских наук, профессор
И. о. ректора В. Михеев
_________________ С.Г. Донич

"17" февраля 2016 года

ОТЗЫВ

ведущего предприятия на диссертационную работу
Паршина Максима Игоревича
"Исследование некоторых математических моделей движения термовязкоупругих жидкостей",
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление"

В течение последних полутора столетий в основном изучались различные начально-краевые и краевые задачи для классических систем уравнений гидродинамики - системы уравнений Эйлера для идеальной жидкости и системы уравнений Навье-Стокса для ньютоновской жидкости. Однако в последние годы внимание математиков обращено на то, что многие реальные среды, такие как различные полимерные растворы, суспензии, кровь, битумы, земная кора, бетон и другие по многим признакам близки к жидкостям, однако не описываются моделями ньютоновской гидродинамики. Такие модели получили название"неньютоновские".

Определяющее (реологическое) соотношение для ньютоновских жидкостей имеет вид $\sigma = \mu\varepsilon$, где σ девиатор тензора напряжений, ε тензор скоростей деформации, а μ - коэффициент вязкости. Такие жидкости называются вязкими и описываются системой уравнений Навье-Стокса. Изучению задач, связанных с моделью Навье-Стокса, посвящены работы большого числа математиков: Ж. Лере, О. А. Ладыженской, В.А. Солонникова, В. Г. Литвинова, C. Guillope, J.-C. Saut, R. Temam, J.-L. Lions, G. P. Galdi и др.

Определяющие же соотношения для неньютоновских жидкостей зачастую содержат как частные, так и субстациональные производные по времени от компонентов тензора скоростей деформации и девиатора тензора напряжений. Особенно сложны для изучения модели с субстациональными производными в связи с возникающими при их исследовании математическими трудностями. Весьма актуальным является исследование одного важного класса неньютоновских жидкостей, которые обладают одновременно свойствами вязкости и упругости.

Интерес к таким моделям и важность их исследования обусловлены успешным применением полученных для них результатов для решения многочисленных практических задач.

Исследования в этом направлении проводились в работах В.Г. Литвинова, А.П. Осколкова, П.Е. Соболевского, В.Г.Звягина, В.П. Орлова, I. Pawlow, E. Feireisl, L. Consiglieri и др.

Особый интерес представляет изучение моделей термовязкоупругости, т.е. таких моделей вязкоупругости,, в которых учитываются как механические, так и явления, связанные с процессом теплопередачи. Это, в частности, отражается в зависимости коэффициентов реологического соотношения от температуры. Влияние температуры приводит к необходимости применять термодинамические соображения.

Диссертационная работа Паршина М.И. посвящена исследованию начально-граничных задач для моделей термовязкоупругих сплошных сред, так что актуальность темы диссертации не вызывает никаких сомнений.

Автором получены условия существования нелокальных слабых решений для систем термовязкоупругости типа Олдройда и с памятью вдоль траекторий движения для регуляризованной модели, нелокальных сильных решений для системы термовязкоупругости типа Навье-Стокса-Фурье-Олдройда при достаточно гладких данных.

Применяемый в диссертации метод исследования основан на сведении исходных задач к дифференциальным уравнениям в подходящих банаховых пространствах, регуляризации этих уравнений, и, в свою очередь, сведению вопроса о разрешимости этих уравнений к нахождению неподвижных точек соответствующих операторных уравнений. При этом важную роль играет доказательства априорных оценок, обеспечивающих разрешимость исследуемых уравнений и сходимость используемых аппроксимационных решений.

Остановимся на содержании диссертации и полученных результатах.

Диссертация объемом 103 страницы состоит из списка обозначений, введения, четырех глав, в которых в общей сложности 18 пунктов, и библиографического списка, состоящего из 56 наименований использованных источников и 14 наименований публикаций автора по теме диссертации.

Глава 1 носит вспомогательный характер. В ней приводятся необходимые сведения из некоторых разделов фунционального анализа и теории функций, которые используются в дальнейших рассмотрениях.

Глава 2 посвящена разрешимости в слабом смысле начально-граничной задачи в модели динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда. Глава состоит из 5 пунктов. В п. 2.1 производится постановка задачи и формулируется основной результат главы в виде теоремы 2.1, доказательство которой разбито на ряд этапов. В п. 2.2 рассматриваются вспомогательные задачи, полученные расщеплением исходной, и доказывается их разрешимость. Эти задачи рассматриваются в операторной трактовке. П. 2.3 посвящен построению аппроксимирующих задач для модели динамики термовязкоупругой среды типа Олдройда. Подходящие априорные оценки из п. 2.4. дают сходимость последовательных приближений. Наконец, предельный переход в п. 2.5 завершает доказательство основной теоремы 2.1.

В главе 3 исследуется динамика термовязкоупругой среды с памятью, которая учитывает предыдущее состояние среды, вдоль траектории поля скоростей. В этом смысле говорится, что система уравнений термовязкоупругости обладает свойством памяти. Доказывается слабая нелокальная разрешимость. Для этого приходится дополнительно исследовать задачу Коши для системы ОДУ, порожденную соответствующим полем скоростей. В п. 3.2 рассматриваются вспомогательные задачи, доказывается их разрешимость для модели динамики термовязкоупругой среды с памятью. П. 3.3 посвящен построению аппроксимирующих задач для модели динамики термовязкоупругой среды с памятью. В п. 3.4 с помощью перехода к пределу доказывается сходимость последовательных приближений. П. 3.5 завершает доказательство основной теоремы 3.1.

Четвертая глава посвящена исследованию существования сильных решений начально-граничных задач динамики термовязкоупругой среды типа Навье-Стокса-Фурье-Олдройда. Эта глава включает в себя 6 пунктов. В п. 4.1 производится постановка задачи и формулируется результат о локальной разрешимости - Теорема 4.1. Пункты 4.2 и 4.3 содержат доказательство Теоремы 4.1. В п. 4.2 рассматриваются вспомогательные задачи, доказывается их разрешимость. Эти задачи рассматриваются в операторной трактовке. Пункт 4.3 посвящен последовательному решению вспомогательных задач. Ключевым моментом доказательства является наличие априорных оценок, которые дают сходимость последовательных приближений на достаточно малом временном промежутке и локальную разрешимость. В пункте 4.4 дается нелокальная постановка задачи и формулируется основной результат главы - Теорема 4.4. Пункты 4.5 и 4.6 содержат доказательство Теоремы 4.4. В пункте 4.5 рассматриваются вспомогательная начально-граничная задача для системы вязкоупругости типа Олдройда с переменной вязкостью и начально-граничная задача для уравнения сохранения энергии с переменным коэффициентом теплопроводности и интегральной частью. Разрешимость этих задач устанавливается путем сведения к операторным уравнениям, для которых применяется принцип сжимающих отображений. В пункте 4.6 строится итерационный процесс, основанный на последовательном решении вспомогательных задач, сходимость которого обеспечивается нелокальными априорными оценками.

Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

По диссертации имеются следующие замечания.

1. Отметим стилистические ошибки (отсутствие или лишние запятые на стр. 8, 9, 16, 34 и т.д.), опечатки (стр. 34, снизу, с.16, 8 строка сверху и т.д)

2. Ссылки [11] и [32] идентичны.

3. Комментарий по поводу вывода системы (0.45)-(0.48) уместо переместить на стр. 9, где обсуждается происхождение уравнений.

4. На стр. 15 появляются не объявленные сокращенные обозначения норм в (0.43)-(0.44).

5. В интегралах на стр. 38 отсутствуют дифференциалы.

6. На стр. 47 формулы (3.6)-(3.7) должны быть после (v, θ).

7. В доказательстве неравенства (3.25) опечатка, вместо $W_2^2(\Omega)$ должно быть $W_2^3(\Omega)$, иначе указанное вложение не имеет места.

8. В главе IV не очень удачно построено изложение основного результата от локального к нелокальному, в каждой части результат объявляется основным без соответствующей ссылки, что затрудняет чтение. Уместнее было бы сразу сформулировать основной результат, а затем изложить его доказательство по той же схеме.

9. На стр. 15 в (0.44) пояляется необъявленное $\hat{g}$.

Эти замечания не являются существенными и не влияют на общее благоприятное впечатление от всей работы в целом.

Подводем итог рассмотрения всей диссертации в целом.

В работе М.И. Паршина изучен важный класс математических моделей термовязкоупругости. Эти задачи исследованы современными методами дифференциальных уравнений и функционального анализа. Достоверность полученных результатов не вызывает сомнений. Изложение результатов ясное и четкое, что показывает уверенное владение автора диссертации современными методами исследования сложных задач.

Результаты диссертации дополняют и развивают математическую теорию термовязкоупругих сплошных сред. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть полезны как специалистам, работающим в области интегродифференциальных уравнений и функционального анализа, так и в исследованиях прикладного характера.

Результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, 5 из которых принадлежат к перечню научных специализированных изданий, рекомендованных ВАК. Автореферат диссертации полностью и адекватно отражает содержание диссертации.

Считаем, что представленная диссертационная работа по актуальности, новизне, научной и практической значимости полученных результатов полностью удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям по физико-математическим наукам, а ее автор, Паршин Максим Игоревич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 —дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв составлен заведующим кафедрой математического анализа Таврической академии Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского, доктором физико-математических наук, профессором Копачевским Николаем Дмитриевичем.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры математического анализа Таврической академии Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского, протокол N 10 от 10 февраля 2016 г.

Копачевский Николай Дмитриевич
доктор физико-математических наук по специальности
01.02.05 механика жидкости, газа и плазмы,
профессор, заведующий кафедрой математического анализа
Таврической академии Крымского федерального университета
имени В.И. Вернадского
295007, Россия, Республика Крым,
г. Симферополь, проспект академика Вернадского, 4
тел. +7(978)8097149, эл. адрес: kopachevsky@list.ru

Заведующий кафедрой математического анализа,
доктор физико-математических наук, профессор Н.Д. Копачевский

Подпись Н.Д. Копачевского подтверждаю
Ученный секретарь
Крымского Федерального университета
им. В.И.Вернадского
Л.М. Митрохина
«17» 02 2016 г.